TABLA BREVE DE INTEGRALES* (continuación)

$\int u \operatorname{sen} u \, du = \operatorname{sen} u - u \cos u.$ $\quad \int u^n \operatorname{sen} u \, du = -u^n \cos u + n \int u^{n-1} \cos u \, du.$

$\int u \cos u \, du = \cos u + u \operatorname{sen} u.$ $\quad \int u^n \cos u \, du = u^n \operatorname{sen} u - n \int u^{n-1} \operatorname{sen} u \, du.$

$\int e^{au} \operatorname{sen} nu \, du = \dfrac{e^{au}(a \operatorname{sen} nu - n \cos nu)}{a^2 + n^2}.$ $\quad \int e^{au} \cos nu \, du = \dfrac{e^{au}(a \cos nu + n \operatorname{sen} nu)}{a^2 + n^2}.$

$\int \operatorname{sen} au \operatorname{sen} bu \, du = -\dfrac{\operatorname{sen}(a+b)u}{2(a+b)} + \dfrac{\operatorname{sen}(a-b)u}{2(a-b)}, \quad a^2 \neq b^2.$

$\int \cos au \cos bu \, du = \dfrac{\operatorname{sen}(a+b)u}{2(a+b)} + \dfrac{\operatorname{sen}(a-b)u}{2(a-b)}, \quad a^2 \neq b^2.$

$\int \operatorname{sen} au \cos bu \, du = -\dfrac{\cos(a+b)u}{2(a+b)} - \dfrac{\cos(a-b)u}{2(a-b)}, \quad a^2 \neq b^2.$

$\int \operatorname{senh} u \, du = \cosh u.$ $\quad \int \cosh u \, du = \operatorname{senh} u.$

$\Gamma(t) = \int_0^\infty e^{-u} u^{t-1} \, du, \quad t > 0;$ $\quad \Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi};$ y $\Gamma(n+1) = n!,$ si n es un entero positivo.

ALGUNAS EXPANSIONES DE SERIES DE POTENCIA

$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \dfrac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \cdots + \dfrac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \cdots$ (series de Taylor)

$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$ $\quad \operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $\quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$

$(1-x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ $\quad (1-x)^{-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$ $\quad \ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}$

$\tan x = x + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{2}{15}x^5 + \tfrac{17}{315}x^7 + \tfrac{62}{2835}x^9 + \cdots$

$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$

$\operatorname{arcsen} x = x + \dfrac{x^3}{2 \cdot 3} + \dfrac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5} x^5 + \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} x^7 + \cdots$

$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k x^{2k}}{(k!)^2 2^{2k}}$ $\quad J_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k x^{2k+1}}{k!(k+1)! 2^{2k+1}}$ $\quad J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k x^{2k+n}}{k! \Gamma(n+k+1) 2^{2k+n}}$

* *Nota:* Se debe añadir una constante arbitraria a cada fórmula.

24. Vuelo de un cohete. Un cohete con masa inicial m_0 kg se lanza de manera vertical desde el suelo. El cohete arroja gas a la razón constante de α kg/s y a una velocidad constante de β m/s con respecto del cohete. Suponga que la magnitud de la fuerza gravitacional es proporcional a la masa, con constante de proporcionalidad g. Como la masa no es constante, la segunda ley de Newton conduce a la ecuación

$$(m_0 - \alpha t)\frac{dv}{dt} - \alpha\beta = -g(m_0 - \alpha t) \ ,$$

donde $v = dx/dt$ es la velocidad del cohete, x es la altura sobre el suelo y $m_0 - \alpha t$ es la masa del cohete t segundos después del lanzamiento. Si la velocidad inicial es cero, resuelva la ecuación anterior para determinar la velocidad del cohete y su altura sobre el suelo para $0 \le t < m_0/\alpha$.

25. Velocidad de escape. De acuerdo con la ley de gravitación de Newton, la fuerza de atracción entre dos objetos varía de manera inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellos. Es decir, $F_g = GM_1M_2/r^2$, donde M_1 y M_2 son las masas de los objetos, r es la distancia entre ellos (de centro a centro), F_g es la fuerza de atracción y G es la constante de proporcionalidad. Considere un proyectil de masa constante m lanzado en forma vertical desde la Tierra (figura 3.12). Sea t el tiempo y v la velocidad del proyectil.

(a) Muestre que el movimiento del proyectil bajo la fuerza gravitacional de la Tierra, queda descrito mediante la ecuación

$$\frac{dv}{dt} = \frac{gR^2}{r^2} \ ,$$

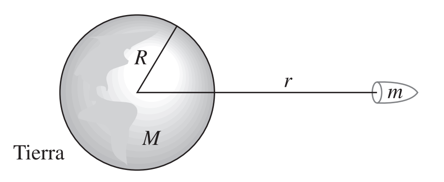


Figura 3.12 Proyectil escapando de la Tierra

donde r es la distancia entre el proyectil y el centro de la Tierra, R es el radio de la Tierra, M es la masa de la Tierra y $g = GM/R^2$.

(b) Use el hecho de que $dr/dt = v$ para obtener

$$v\frac{dv}{dr} = -\frac{gR^2}{r^2} \ .$$

(c) Si el proyectil sale de la superficie de la Tierra con velocidad v_0, muestre que

$$v^2 = \frac{2gR^2}{r} + v_0^2 - 2gR \ .$$

(d) Use el resultado de la parte (c) para mostrar que la velocidad del proyectil sigue siendo positiva si y sólo si $v_0^2 - 2gR > 0$. La velocidad $v_e = \sqrt{2gR}$ es la **velocidad de escape** de la Tierra.

(e) Si $g = 9.81$ m/s^2 y $R = 6370$ km para la Tierra, ¿cuál es la velocidad de escape de la Tierra?

(f) Si la aceleración debida a la gravedad para la Luna es de $g_m = g/6$ y el radio de la Luna es $R_m = 1738$ km, ¿cuál es la velocidad de escape de la Luna?

3.5 CIRCUITOS ELÉCTRICOS

En esta sección consideraremos la aplicación de las ecuaciones diferenciales de primer orden a circuitos eléctricos sencillos que están formados por una fuente de voltaje (por ejemplo, baterías o generadores), una resistencia y un inductor o un condensador. En la figura 3.13 aparecen los circuitos llamados *RL* y *RC*. En la sección 5.6 se analizarán circuitos más generales.

Los principios físicos que gobiernan los circuitos eléctricos fueron establecidos por G. R. Kirchhoff[†] en 1859. Los principios son los siguientes:

1. **Ley de la corriente de Kirchhoff**: La suma algebraica de las corrientes que fluyen en cualquier punto de unión debe anularse.

[†] ***Nota histórica:*** Gustav Robert Kirchhoff (1824-1887) fue un físico alemán que destacó por sus investigaciones en análisis espectral, óptica y electricidad.

2. **Ley del voltaje de Kirchhoff**: La suma algebracia de los cambios instantáneos del potencial (caídas de voltaje) en torno de cualquier lazo cerrado debe anularse.

La ley de la corriente de Kirchhoff implica que la misma corriente pasa por cada elemento del circuito de la figura 3.13.

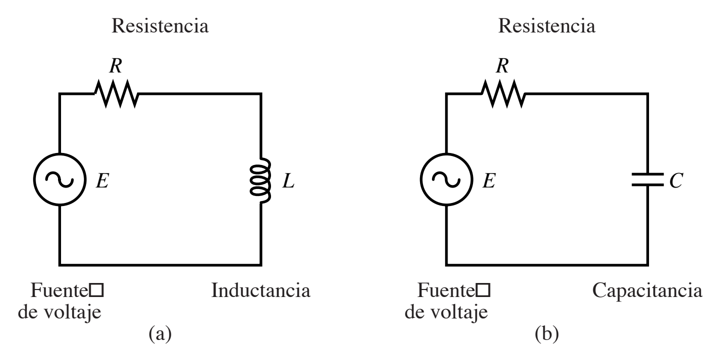


Figura 3.13 (a) Circuito *RL* y (b) circuito *RC*

Para aplicar la ley del voltaje de Kirchhoff, debemos conocer la caída de voltaje a través de cada elemento del circuito. Estas fórmulas para el voltaje aparecen a continuación (usted puede consultar un texto de introducción a la física para más detalles).

(a) De acuerdo con la ley de Ohm, la caída de voltaje E_R a través de una resistencia es proporcional a la corriente I que pasa por la resistencia:

$$E_R = RI.$$

La constante de proporcionalidad R se llama la **resistencia**.

(b) Se puede mostrar mediante las leyes de Faraday y Lenz que la caída de voltaje E_L a través de un inductor es proporcional a la razón de cambio instantánea de la corriente I:

$$E_L = L\frac{dl}{dt}.$$

La constante de proporcionalidad L se llama la **inductancia**.

(c) La caída de voltaje E_C a través de un condensador es proporcional a la carga eléctrica q sobre el condensador:

$$E_C = \frac{1}{C}q\ .$$

La constante C es llamada la **capacitancia.**

Las unidades y símbolos comunes utilizados para los circuitos eléctricos aparecen en la tabla 3.3.

TABLA 3.3 UNIDADES Y SÍMBOLOS COMUNES UTILIZADOS EN LOS CIRCUITOS ELÉCTRICOS

Cantidad	Representación literal	Unidades	Representación simbólica
Fuente de voltaje	E	voltio (V)	Generador
			Batería
Resistencia	R	ohm (Ω)	
Inductancia	L	henrio (H)	
Capacitancia	C	faradio (F)	
Carga	q	coulomb (C)	
Corriente	I	amperio (A)	

Suponemos que una fuente de voltaje *suma* voltaje o energía potencial al circuito. Si $E(t)$ denota el voltaje que se proporciona al circuito en el instante t, entonces la ley del voltaje de Kirchhoff aplicada al circuito RL en la figura 3.13(a) da

(1) $$E_L + E_R = E(t) \ .$$

Al sustituir en (1) las expresiones para E_L y E_R tenemos

(2) $$L\frac{dI}{dt} + RI = E(t) \ .$$

Observe que esta ecuación es lineal (compare la sección 2.3); al escribirla en forma canónica obtenemos el factor integrante

$$\mu(t) = e^{\int (R/L)dt} = e^{Rt/L} \ ,$$

que conduce a la solución general [véase la ecuación (8), sección 2.3]

(3) $$I(t) = e^{-Rt/L}\left[\int e^{Rt/L}\frac{E(t)}{L}\,dt + K\right] \ .$$

Para el circuito RL, por lo general se da la corriente inicial $I(0)$ como condición inicial.

EJEMPLO 1 Un circuito RL con una resistencia de 1 Ω y un inductor de 0.01 H es controlado por un voltaje $E(t) = \text{sen } 100t$ V. Si la corriente inicial en el inductor es nula, determinar los voltajes subsecuentes en la resistencia y en el inductor, así como la corriente.

SOLUCIÓN De la ecuación (3) y las tablas de las integrales, vemos que la solución general de la ecuación lineal (2) está dada por

$$I(t) = e^{-100t}\left(\int e^{100t}\frac{\text{sen } 100t}{0.01}\,dt + K\right)$$

$$= e^{-100t}\left[100\,\frac{e^{100t}(100 \text{ sen } 100t - 100 \cos 100t)}{10{,}000 + 10{,}000} + K\right]$$

$$= \frac{\text{sen } 100t - \cos 100t}{2} + Ke^{-100t} \ .$$

Para $I(0) = 0$, obtenemos $-1/2 + K = 0$, de modo que $K = 1/2$ y la corriente es

$$I(t) = 0.5(\text{sen } 100t - \cos 100t + e^{-100t}) \ .$$

Entonces, los voltajes en el inductor y la resistencia están dados por

$$E_R(t) = RI(t) \equiv I(t) \ ,$$

$$E_L(t) = L\frac{dI}{dt} = (0.5)(\cos 100t + \text{sen } 100t - e^{-100t}) \ . \blacksquare$$

Ahora regresemos al circuito RC de la figura 3.13(b). Al aplicar la ley del voltaje de Kirchhoff se tiene

$$RI + q/C = E(t) \ .$$

Sin embargo, la corriente en el condensador es la razón de cambio de su carga: $I = dq/dt$. Así,

$$\textbf{(4)} \qquad R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E$$

es la ecuación diferencial para el circuito RC. La condición inicial para un condensador es su carga q en $t = 0$.

EJEMPLO 2 Suponga que un condensador de C faradios soporta una carga inicial de Q coulombs. Para alterar la carga, se aplica una fuente de voltaje constante de V voltios a través de una resistencia de R ohms. Describir la carga del condensador para $t > 0$.

SOLUCIÓN Como $E(t) = V$ es constante en la ecuación (4), ésta es separable y lineal; su solución general se encuentra fácilmente:

$$q(t) = CV + Ke^{-t/RC} \ .$$

La solución que cumple la condición inicial prescrita es

$$q(t) = CV + (Q - CV)e^{-t/RC} \ .$$

La carga en el condensador cambia de manera exponencial de Q a CV al aumentar el tiempo. ■

Si hacemos $V = 0$ en el ejemplo 2, vemos que la *constante de tiempo* (es decir, el tiempo necesario para que la carga en el condensador caiga a $1/e$ por su valor inicial) es RC. Así, un condensador es un dispositivo de almacenamiento de energía con fugas; inclusive la muy alta resistencia del aire circundante puede disipar su carga, particularmente en un día húmedo. Los condensadores se utilizan en los teléfonos celulares para almacenar la energía eléctrica de la batería cuando el teléfono se encuentra en un estado (más o menos) inactivo de recepción y luego ayudar a la batería a proporcionar energía durante el modo de transmisión.

La constante de tiempo para la corriente en el inductor del circuito RL se puede deducir en el ejemplo 1 como L/R. Una aplicación del circuito RL es a las bujías en un motor de combustión. Si una fuente de voltaje establece una corriente no nula en un inductor y la fuente se desconecta súbitamente, el rápido cambio en lacorriente produce un alto dI/dt y, de acuerdo con la fórmula $E_L = L\, dI/dt$, el inductor genera un pico de voltaje suficiente para causar una chispa a través de las terminales, provocando la ignición de la gasolina.

Si un inductor y un condensador aparecen *juntos* en un circuito, la ecuación diferencial correspondiente será de segundo orden. Regresaremos a los circuitos RLC en la sección 5.6.

EJERCICIOS 3.5

1. Un circuito *RL* con una resistencia de 5 Ω y un inductor de 0.05 H tiene una corriente de 1 A en $t = 0$, cuando se aplica una fuente de voltaje $E(t) = 5 \cos 120t$ V. Determine la corriente y el voltaje subsecuentes en el inductor.
2. Un circuito *RC* con una resistencia de 1 Ω y un condensador de 0.000001 F tiene un voltaje $E(t) = \operatorname{sen} 100t$ V. Si el voltaje inicial en el condensador es nulo, determine el voltaje en la resistencia, el voltaje en el inductor y la corriente subsecuentes.
3. La trayectoria de una señal eléctrica binaria entre compuertas en un circuito integrado se puede modelar como un circuito *RC*, como en la figura 3.13(b); la fuente de voltaje modela la compuerta de transmisión y el condensador modela la compuerta de recepción. Por lo general, la resistencia es 100 Ω y la capacitancia es muy pequeña, digamos 10^{-12} F (1 picofaradio, pF). Si el condensador no tiene carga inicialmente y la compuerta de transmisión cambia de manera instantánea de 0 a 5 V, ¿cuánto tiempo tarda el voltaje en la compuerta de recepción en alcanzar (digamos) 3 V? (Éste es el tiempo necesario para transmitir un "1" lógico).
4. Si la resistencia en el circuito *RL* de la figura 3.13(a) es igual a cero, muestre que la corriente $I(t)$ es directamente proporcional a la integral del voltaje aplicado $E(t)$. De manera similar, muestre que si la resistencia en el circuito *RC* de la figura 3.13(b) es cero, la corriente es directamente proporcional a la derivada del voltaje aplicado. (En las aplicaciones a la ingeniería, con frecuencia es necesario generar un *voltaje*, en vez de una corriente, que es la integral o derivada de otro voltaje. El proyecto D muestra cómo lograr esto con un *amplificador operacional*).
5. La *potencia* generada o disipada por un elemento de un circuito es igual al voltaje a través del elemento por la corriente que pasa por el elemento. Muestre que la potencia disipada por una resistencia es igual a I^2R, que la potencia asociada a un inductor es igual a la derivada de $(1/2)LI^2$, y que la potencia asociada a un condensador es igual a la derivada de $(1/2)CE_C^2$.
6. Deduzca una ecuación de equilibrio de la potencia para los circuitos *RL* y *RC*. (Ver problema 5). Analice el significado de los signos de los tres términos de potencia.
7. Un electroimán industrial se puede modelar como un circuito *RL*, cuando se energiza mediante una fuente de voltaje. Si la inductancia es 10 H y el embobinado contiene 3 Ω de resistencia, ¿cuánto tiempo tarda un voltaje constante aplicado en energizar el electroimán hasta 90% de su valor final (es decir, que la corriente sea igual a 90% de su valor asintótico)?
8. Un condensador de 10^{-8} F (10 nanofaradios) se carga hasta 50 V y luego se desconecta. Se puede modelar la fuga de la carga del condensador con un circuito *RC* sin fuente de voltage y la resistencia del aire entre las placas del condensador. En un día frío y seco, el brinco en la resistencia del aire es 5×10^{13} Ω; en un día húmedo, la resistencia es 7×10^6 Ω. ¿Cuánto tiempo tardará el voltaje del condensador en disiparse hasta la mitad de su valor original en cada día?

3.6 MÉTODO DE EULER MEJORADO

Aunque las técnicas analíticas presentadas en el capítulo 2 fueron útiles para la gama de modelos matemáticos presentados anteriormente en este capítulo, *la mayor parte de las ecuaciones diferenciales que aparecen en las aplicaciones no se pueden resolver de manera explícita o implícita*. Esto es particularmente cierto para las ecuaciones de orden superior y los sistemas de ecuaciones, que estudiaremos en capítulos posteriores. En esta sección y la siguiente analizaremos métodos para obtener una *aproximación* numérica de la solución de un problema con valores iniciales para una ecuación diferencial de primer orden. Nuestro objetivo es desarrollar algoritmos que usted pueda utilizar con una calculadora o una computadora. Estos algoritmos también se extienden de manera natural a ecuaciones de orden su-